فصل سوم

سري فوريه سيستم‌هاي زمان پيوسته و زمان گسسته

۳-۱- تعاريف

۳-۱-۱-سيگنال متناوب

سيگنال متناوب است اگر $x(t) = x(t+T)$ و $T > 0$ بوده و دوره تناوب اصلي سيگنال $x(t)$ كوچكترين مقدار مثبت غيرصفر T است كه در رابطه بالا صدق مي‌كند. $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ فركانس اصلي سيگنال خواهد بود.

مثال ۱)

الف) $$x(t) = 2\sin(3t) \quad \Rightarrow \omega_0 = 3\,, \quad T = \frac{2\pi}{3}$$

ب) $$x(t) = 4\cos(\sqrt{2}t) \quad \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{2}\,, \quad T = \frac{2\pi}{\sqrt{2}}$$

۳-۱-۲- دوره تناوب حاصل جمع دو سيگنال

به طور كلي قانون خاصي براي اين حالت وجود ندارد. در بعضي موارد اگر هر يك از سيگنال‌ها متناوب باشند حاصل‌جمع آنها نيز متناوب است و در بعضي موارد با وجود متناوب بودن هر يك از سيگنال‌ها، حاصل جمع آنها متناوب نيست.

مثال ۲)

الف) $$x(t) = e^{j2t} + e^{j3t}$$

$$T_1 = \frac{2\pi}{2} \quad , \quad T_2 = \frac{2\pi}{3}$$

$$= 2\pi \quad , \quad = \frac{4\pi}{3}$$

$$= 3\pi \quad , \quad = \frac{6\pi}{3} = 2\pi$$

$$m = \frac{2\pi}{\pi} = 2 \quad , \quad n = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{3}} = 3$$

ب) $$x(t) = 2\cos t + 4\cos(\sqrt{2}t)$$

$$T_1 = \frac{2\pi}{1} \quad , \quad T_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{2}}$$

عليرغم متناوب بودن تك‌تك سيگنال‌هاي تشكيل‌دهنده x(t)، اين سيگنال نامتناوب است.

تذکر: اگر $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ و دوره تناوب آنها به ترتیب T_1, T_2 باشد حاصل جمع دو سیگنال زماني متناوب است که رابطه زیر برقرار باشد:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

(n_1 , n_2 باید اعداد صحیح مثبت و $\frac{n_1}{n_2}$ عدد کسري صحیح (گویا) باشد)

۳-۱-۳- دوره تناوب حاصلضرب دو سیگنال

۱- در صورت امکان پس از تبدیل حاصلضرب توابع به حاصل‌جمع دو تابع، دوره تناوب را به دست مي‌آوریم (چنانچه دوره تناوب را در همان حالتي که در هم ضرب شده محاسبه کنیم دوره تناوب به دست آمده ممکن است دوره تناوب اصلي سیگنال نباشد.)

۲- چنانچه سیگنال حاصلضرب قابل تبدیل به حاصل‌جمع نبود، با توجه به رابطه $z(t) = x(t)\cdot y(t)$ و $z(t) = z(t+T)$ دوره تناوب $z(t)$ را در صورت وجود محاسبه مي‌کنیم.

مثال ۳)

الف) $z(t) = e^{j6t}\cos(10t)$

$$T_1 = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \quad , \quad T_2 = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5}$$
$$= \frac{2\pi}{3} \quad , \quad = \frac{2\pi}{5}$$
$$= \frac{3\pi}{3} = \pi \quad , \quad \vdots \qquad \Rightarrow T = \pi$$
$$= \frac{5\pi}{5} = \pi$$

ب)

$$z(t) = e^{j6t}\cdot\frac{1}{2}(e^{j10t} + e^{-j10t}) = \frac{1}{2}e^{j16t} + \frac{1}{2}e^{-j4t}$$
$$T_1 = \frac{2\pi}{16} = \frac{\pi}{8} \quad , \quad T_2 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$
$$= \frac{2\pi}{8}$$
$$= \frac{3\pi}{8} \qquad \Rightarrow T = \frac{\pi}{2}$$
$$= \frac{4\pi}{8}$$

همانطور که ملاحظه مي‌شود دوره تناوب محاسبه شده از حاصل‌ضرب دو سيگنال (π) دوره تناوب اصلي سيگنال يا كوچكترين دوره تناوب سيگنال $(\frac{\pi}{2})$ نمي‌باشد.

قضيه: اگر $f(t)$ با دوره تناوب T باشد، آنگاه با توجه به $f(t)=f(t+T)$ تابع $G(t)=f(f(t))$ نيز پريوديك با دوره تناوب T خواهد بود. اگر T_1 دوره تناوب اصلي تابع f(t) باشد، در اين صورت دوره تناوب اصلي G(t) لزوما T نيست.

مثال ٤)

الف)

$$f(t)=\cos(t) \Rightarrow \quad T_1=\frac{2\pi}{1}\ , \quad T=4\pi=6\pi=\dots$$

$$g(t)=f^3(t) \Rightarrow g(t)=\cos^3 t=\frac{3}{4}\cos t+\frac{1}{4}\cos 3t$$

$$T_1=\frac{2\pi}{1}\ \ ,\ T_2=\frac{2\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}=\frac{6\pi}{3}$$

ب)

$$g(t)=\cos^4 t$$

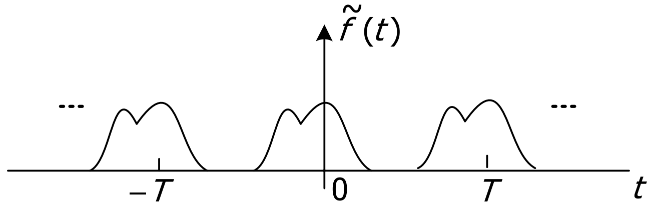
$$=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 2t+\frac{1}{8}\cos 4t$$

$$T_1=\frac{2\pi}{2} \quad , \quad T_2=\frac{2\pi}{8}=\frac{4\pi}{4}$$

٣-١-٤- روش نوشتن توابع به صورت پريوديك

اگر سيگنال در طي يك دوره تناوب (T) فرموله شود (f(t))، با استفاده از رابطه زير سيگنال متناوب در كل زمان‌ها بيان مي‌شود $(\tilde{f}(t))$.

$$\tilde{f}(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t-KT)$$



۳-۲- سري فوريه زمان پيوسته

سري فوريه، تنها براي توابع متناوب بيان مي‌شود، توابعي كه داراي دوره تناوب اصلي $x(t) = x(t+T) \quad , \quad T = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$ مي‌باشند. سري فوريه را به هر يك از دو فرم زير مي‌توان نمايش داد:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, e^{jk(\frac{2\pi}{T})t}$$

سؤال: چرا علاقمند هستيم كه سيگنال متناوب را به صورت مجموعي از نمايي‌هاي مختلط نمايش دهيم؟

۱) در صورت موفقيت، شناخت بهتري نسبت به سيگنال و محتواي فركانسي آن به‌دست مي‌آوريم. (در صورتي كه بتوان سيگنال را به صورت مجموعه اي از هارموني‌ها بسط داد، مي‌توان به اين سوال كه در يك سيگنال چه فركانس‌هايي و با چه قدرتي وجود دارند را پاسخ داد.)

۲) پاسخ سيستم LTI به نمايي مختلط $e^{jk\omega_0 t}$ يا به طور كلي $e^{j\omega t}$ به فرم بسيار ساده‌اي تعريف مي‌شود.

تذكر ۱: هرچه هارموني‌ها بالاتر باشد فركانس‌ها بالاتر است و برعكس هر چه هارموني‌ها پايين‌تر باشد فركانس‌ها پايين‌تر است.

تذكر ۲: اگر سيگنالي در هارموني‌هاي بالا ضرايب سري فوريه بزرگتري داشته باشد سيگنال فركانس بالا است و برعكس اگر سيگنالي در هارموني‌هاي پايين ضرايب سري فوريه بزرگتري داشته باشد سيگنال فركانس پايين است.

$$\Phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t} \quad , \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

$$T_k = \frac{2\pi}{k\omega_0} \quad \Rightarrow \quad T_1\Big|_{k=\pm 1} = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad , \quad T_2\Big|_{k=\pm 2} = \frac{2\pi}{2\omega_0} \quad , \quad T_3\Big|_{k=\pm 3} = \frac{2\pi}{3\omega_0} \quad , \ldots$$

مثال ۵) دوره تناوب اصلي سيگنال زير چيست؟

$$x(t) = 1 + \frac{1}{2}\cos(2\pi t) + \cos(4\pi t) + \frac{2}{3}\cos(6\pi t)$$

$$T_1 = \frac{2\pi}{2\pi} = 1 \quad , \quad T_2 = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2} \quad , \quad T_3 = \frac{2\pi}{6\pi} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow T_0 = 1 \,,\, \omega_0 = \frac{2\pi}{1}$$

با توجه به رابطه اويلر:

$$x(t) = 1 + \frac{1}{4}e^{j(2\pi)t} + \frac{1}{4}e^{-j(2\pi)t} + \frac{1}{2}e^{j2(2\pi)t} + \frac{1}{2}e^{j(-2)(2\pi)t} + \frac{1}{3}e^{j3(2\pi)t} + \frac{1}{3}e^{j(-3)(2\pi)t}$$

$$\Rightarrow a_0 = 1 \,, \quad a_1 = a_{-1} = \frac{1}{4} \,, \quad a_2 = a_{-2} = \frac{1}{2} \,, \quad a_3 = a_{-3} = \frac{1}{3}$$

فرم ديگر سري فوريه (سيگنال‌هاي حقيقي):

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k\,e^{jk\omega_0 t}=\sum_{k=-\infty}^{-1}a_k\,e^{jk\omega_0 t}+a_0+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\,e^{jk\omega_0 t}$$

$$\overset{k\to -k}{\Rightarrow}=\sum_{k=1}^{\infty}a_{-k}\,e^{-jk\omega_0 t}+a_0+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\,e^{jk\omega_0 t}=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\,e^{jk\omega_0 t}+a_{-k}\,e^{-jk\omega_0 t}$$

$$\Rightarrow x(t)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\,e^{jk\omega_0 t})+(a_{-k}^{*}\,e^{jk\omega_0 t})^{*}$$

اگر $x(t)=x^{*}(t)$ باشد:

$$x^{*}(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k^{*}\,e^{jk\omega_0 t}\quad ,\quad x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k\,e^{jk\omega_0 t}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_{-k}^{*}\,e^{jk\omega_0 t}$$

$$\Rightarrow x(t)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\,e^{jk\omega_0 t})+(a_k\,e^{jk\omega_0 t})^{*}=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}2\,\mathrm{Re}(a_k\,e^{jk\omega_0 t}),\quad a_k=A_k\cdot e^{j\theta k}$$

$$\Rightarrow a_0+\sum_{k=1}^{\infty}2\,\mathrm{Re}(A_k\,e^{j(k\omega_0 t+\theta)})=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}2A_k\cos(k\omega_0 t+\theta_k)$$

۳-۲-۱- تعيين ضرايب سري فوريه

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k\,e^{jk\omega_0 t}$$

طرفين رابطه بالا را در $e^{-jn\omega_0 t}$ ضرب مي‌كنيم و از طرفين رابطه روي يك دوره تناوب انتگرال مي‌گيريم:

$$x(t)\cdot e^{-jn\omega_0 t}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k\,e^{j(k-n)\omega_0 t}\Rightarrow\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\cdot e^{-jn\omega_0 t}dt=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k\underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 t}dt}_{I}\ ,$$

$$I=\frac{1}{T}\int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 t}dt$$

$$=\frac{1}{T}\int_0^T\cos(k-n)\omega_0 t\,dt+\frac{1}{T}\int_0^T j\sin(k-n)\omega_0 t\,dt=\begin{cases}0 & k\neq n\\ 1 & k=n\end{cases}$$

اگر k=n باشد، مقدار I طبق اثبات برابر واحد شده كه در نتيجه ضرايب سري فوريه از رابطه زير بدست مي آيند

$$a_n=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,e^{-jn\omega_0 t}dt$$

۳-۲-۲- همگرايي سري فوريه

سؤال: سيگنال متناوب x(t) تحت چه شرايطي داراي نمايش سري فوريه است؟

شرايط ديريكله:

۱) سيگنال مطلقا انتگرال‌پذير باشند:

$$\langle x(t),x(t)\rangle=\frac{1}{T}\int_T x(t)\cdot x(t)^{*}dt=\frac{1}{T}\int_T|x(t)|^2dt<\infty$$

۲) براي يك سيگنال متناوب كه تعداد محدودي ناپيوستگي در هر دوره تناوب دارد، نمايش سري فوريه در همه جا به جز نقاط منفرد ناپيوستگي برابر سيگنال است و در نقاط ناپيوستگي سري به مقدار متوسط سيگنال در آن نقطه همگرا مي‌شود.

تذكر: در كليه موارد عملي سري فوريه را مي‌توان به كار برد. اما سيگنال‌هايي كه شرايط ديريكله را ارضاء نمي‌كنند طبيعت نامعقولي دارند، در نتيجه عموما در زمينه‌هاي عملي ظاهر نمي‌شوند.

مثال ٦)

الف)
$$x(t) = 1 + \sin(\omega_0 t) + 2\cos(\omega_0 t) + \cos(2\omega_0 t + \frac{\pi}{4})$$

$$= 1 + (\frac{1}{2j} + 1)\, e^{j\omega_0 t} + (-\frac{1}{2j} + 1)\, e^{-j\omega_0 t} + \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{4}} \cdot e^{j2\omega_0 t} + \frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{4}} \cdot e^{-j2\omega_0 t}$$

$$a_0 = 1 \,,\; a_1 = a_{-1}^* = 1 + \frac{1}{2j} \quad , \quad a_2 = a_{-2}^* = \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1 + j)$$

ب)
$$x(t) = \sin(\omega_0 t) \quad \Rightarrow a_1 = a_{-1}^* = \frac{1}{2j}$$

تمرين: سيگنال زير شامل چه هارموني‌هايي است؟

$$x(t) = \frac{3}{2} e^{j10\omega_0 t} + \frac{3}{2} e^{-j10\omega_0 t} + \frac{5}{2} e^{j11\omega_0 t} + \frac{5}{2} e^{-j11\omega_0 t}$$

يادآوري:

اگر $x(t) = x(t+T)$ در اين صورت سيگنال داراي سري فوريه است پس:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, e^{jk(\frac{2\pi}{T})t}$$
"فرمول سنتز"

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t)\, e^{-jk(\frac{2\pi}{T_0})t} dt$$
" فرمول آناليز"

تذكر ۱: مجوعه ضرايب $\{a_k\}$ را ضرايب سري فوريه يا ضرايب طيفي x(t) مي‌نامند. اين ضرايب در حالت كلي مختلط هستند و اندازه آن‌ها نشان‌دهنده قدرت سيگنال در هارموني متناظر است.

تذكر ۲: ضريب a_0 مؤلفه DC يا ثابت سيگنال است كه از رابطه زير محاسبه مي‌شود:

مقدار متوسط
$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t)\, dt$$

تمرين۱: چه تفاوتي ميان $u(t)$ و $u(2t)$ و $u(\frac{t}{2})$ وجود دارد؟

تمرين۲:چه تفاوتي ميان $u(t-T_0)$ و $u(2t-T_0)$ و $u(\frac{t}{2}-T_0)$ وجود دارد؟

۳-۳- خواص سري فوريه زمان پيوسته

۳-۳-۱- خطي بودن

$$x(t) \xrightarrow{f_s} a_k \quad ; \quad x(t) = x(t+T_0)$$
$$y(t) \xrightarrow{f_s} b_k \quad ; \quad y(t) = y(t+T_0)$$
$$z(t) = Ax(t) + By(t) \xrightarrow{f_s} z(t) = Aa_k + Bb_k \quad ; \quad z(t) = z(t+T_0)$$

۳-۳-۲- انتقال زماني

$$x(t) \xrightarrow{f_s} a_k \quad ; \quad x(t) = x(t+T_0)$$
$$y(t) = x(t-t_0) \xrightarrow{f_s} b_k = a_k\, e^{-jk(\frac{2\pi}{T_0})t_0} \quad ; \quad y(t) = y(t+T_0)$$
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, e^{jk(\frac{2\pi}{T_0})t} \Rightarrow x(t-t_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, e^{jk(\frac{2\pi}{T_0})(t-t_0)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{T_0})t}\, e^{-jk(\frac{2\pi}{T_0})t_0}$$

۳-۳-۳- وارون‌سازي زماني

$$x(t) \xrightarrow{f_s} a_k \quad ; \quad x(t) = x(t+T_0)$$
$$y(t) = x(-t) \xrightarrow{f_s} b_k = a_{-k} \quad ; \quad y(t) = y(t+T_0)$$
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, e^{jk(\frac{2\pi}{T_0})t} \Rightarrow x(-t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, e^{-jk(\frac{2\pi}{T_0})t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{-k}\, e^{jk(\frac{2\pi}{T_0})t}$$

الف) $x(t) = x(-t) \Rightarrow a_k = a_{-k}$

ب) $x(t) = -x(-t) \Rightarrow a_k = -a_{-k}$

۳-۳-٤- تغيير مقياس زماني

$$x(t) \xrightarrow{f_s} a_k \;; \quad x(t) = x(t+T_0)$$
$$y(t) = x(at) \xrightarrow{f_s} a_k \;; \quad y(t) = y(t+\frac{T_0}{a})$$
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, e^{jk(\frac{2\pi}{T_0})t} \Rightarrow x(at) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, e^{jk(\frac{2\pi}{T_0})at} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, e^{jk(\frac{2\pi}{\frac{T_0}{a}})t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, e^{jka\omega_0 t}$$

۳-۳-٥- مزدوج گيري

$$x(t) \xrightarrow{f_s} a_k$$
$$x^*(t) \xrightarrow{f_s} a_{-k}^*$$
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, e^{jk(\frac{2\pi}{T_0})t} \Rightarrow x^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^*\, e^{-jk(\frac{2\pi}{T_0})at} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{-k}^*\, e^{+jk(\frac{2\pi}{T_0})at}$$

۱) اگر سيگنال حقيقي باشد چون $x(t) = x^*(t)$ پس $a_k = a_{-k}^*$

۲) اگر سيگنال حقيقي و زوج باشد، $a_k = a_{-k}^*$ و $a_k = a_{-k}$ آنگاه ضرايب سري فوريه مطلقا حقيقي و زوج هستند.

۳) اگر سيگنال حقيقي و فرد باشد، $a_k = a_{-k}^*$ و $a_k = -a_{-k}$ آنگاه ضرايب سري فوريه مطلقا موهومي و فرد هستند.

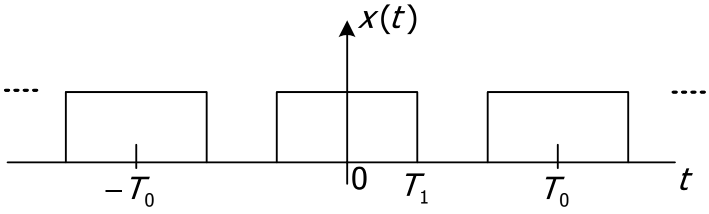
۳-۳-٦- رابطه پارسوال

$$\frac{1}{T_0}\int_{T_0} \left|x(t)\right|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|a_k\right|^2$$

$\left|a_k\right|^2$ نشان‌دهنده قدرت سيگنال در هارموني kام است.

$$< x(t), x(t) >= \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\cdot x^*(t)dt$$

مثال ۱) ضرايب سري فوريه شكل مقابل را به دست آوريد.



$$x(t)=\begin{cases}1 & |t|<T_1\\ 0 & T_1<|t|<\dfrac{T_0}{2}\end{cases}$$

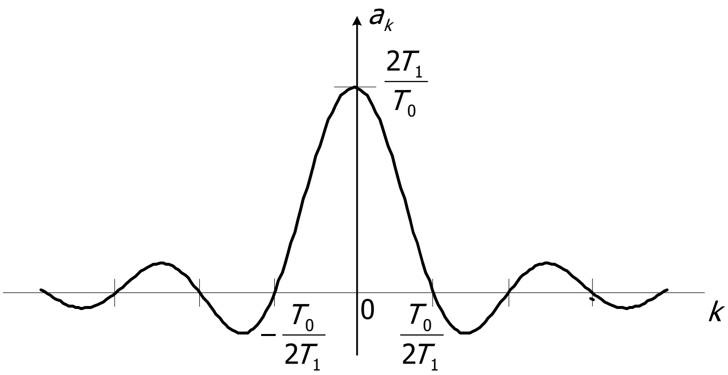
$$a_k=\frac{1}{T_0}\int_{-T_1}^{T_1}1\cdot e^{-jk(\frac{2\pi}{T_0})t}dt=\frac{1}{T_0}\cdot\frac{-1}{jk\,\frac{2\pi}{T_0}}e^{-jk(\frac{2\pi}{T_0})t}\Bigg|_{-T_1}^{T_1}$$

$$=\frac{-1}{jk2\pi}\cdot\left(e^{-jk(\frac{2\pi}{T_0})T_1}-e^{jk(\frac{2\pi}{T_0})T_1}\right)=\frac{-1}{jk2\pi}(-2j)\sin\left(k\,\frac{2\pi}{T_0}\cdot T_1\right)$$

$$\Rightarrow a_k=\frac{\sin(k\omega_0T_1)}{k\pi}$$

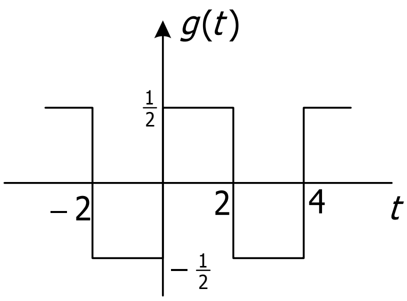
$$\mathrm{sinc}(k)=\frac{\sin(k\pi)}{k\pi}\Rightarrow a_k=\frac{2T_1}{T_0}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{2\mathrm{T}_1}{\mathrm{T}_0}k\right)$$

با توجه به تعریف :



$$\begin{cases}a)\ T_0=\mathrm{cte},\ T_1\to 0\\ b)\ T_1=\mathrm{cte},\ T_0\to\infty\end{cases}$$

مثال ۲)



$$g(t)=x(t-1)-\frac{1}{2}$$

$$T_0=4\quad,\quad T_1=1$$

$$x(t)\to a_k$$

$$x(t-t_0)\to a_k\,e^{-jk(\frac{2\pi}{T_0})t}=a_k\,e^{-jk(\frac{2\pi}{4})t}$$

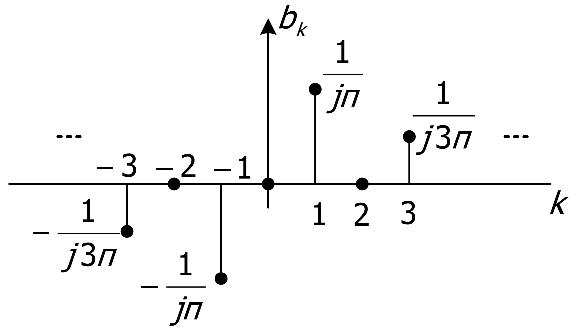
$e^{jk2\pi} = 1 \quad *$

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(k\frac{\pi}{2})}{k\pi} \cdot e^{-jk\frac{\pi}{2}} \cdot e^{jk(\frac{2\pi}{4})t} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} \frac{\sin(k\frac{\pi}{2})}{k\pi} \cdot e^{-jk\frac{\pi}{2}} \cdot e^{jk(\frac{2\pi}{4})t} - \frac{1}{2}$$

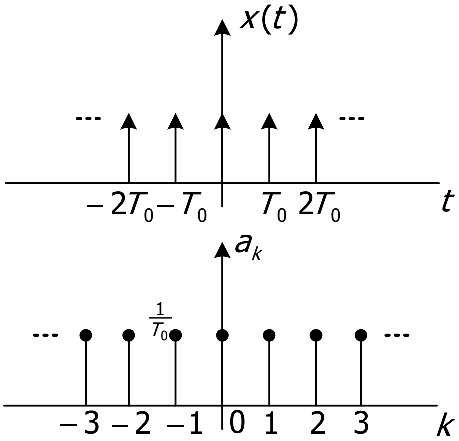
$$\Rightarrow g(t) = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} \frac{\sin(k\frac{\pi}{2})}{k\pi} \cdot e^{-jk\frac{\pi}{2}} \cdot e^{jk(\frac{\pi}{2})t}$$

$$b_k = \frac{\sin(k\frac{\pi}{2})}{k\pi} \cdot e^{-jk} = \frac{e^{-jk\frac{\pi}{2}}}{k\pi} \cdot \left(\frac{e^{jk\frac{\pi}{2}} - e^{-jk\frac{\pi}{2}}}{2j}\right) = \frac{1}{2jk\pi} \cdot (1 - e^{-jk\pi}) = \frac{1}{2jk\pi} \cdot (1 - (-1)^k)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b_k = 0 & k : even \\ b_k = \dfrac{1}{jk\pi} & k : odd \end{cases}$$



۳-۴- قطار ضربه



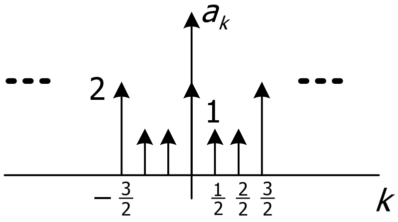
$$x(t) = x(t + T_0)$$

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \delta(t) e^{-jk(\frac{2\pi}{T_0})t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \delta(t) dt = \frac{1}{T_0}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} e^{jk(\frac{2\pi}{T_0})t}$$

مثال ۳)

$$\tilde{x}(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t-\frac{m}{2}) + \delta(t-\frac{3m}{2})$$



$$T_0 = \frac{3}{2}$$

$$a_k = \frac{1}{\frac{3}{2}} \int_{T_0=\frac{3}{2}} (\delta(t+\frac{1}{2}) + 2\delta(t) + \delta(t-\frac{1}{2}))\, e^{-jk\frac{2\pi}{\frac{3}{2}}t}\, dt = \frac{2}{3}(2+2\cos(\frac{2\pi}{3}k)) = \frac{4}{3}(1+\cos(\frac{2\pi}{3}k))$$

۳-۵- سري فوريه زمان گسسته

$$\varphi[n] = e^{j\Omega n}$$

$$\varphi_k[n] = e^{jk(\frac{2\pi}{N})n} = \cos(k\frac{2\pi}{N}n) + j\sin(k\frac{2\pi}{N}n)$$

$$\frac{2\pi}{k\frac{2\pi}{N}} = \frac{N}{K}, (k \in Z)$$

تك تك هارمونيها دوره تناوب N دارند:

$$\varphi_k[n] = \varphi_k[n+N] \Rightarrow \varphi_k[n] = e^{jk(\frac{2\pi}{N})n},\ \varphi_{k+N}[n] = e^{j(k+N)\frac{2\pi}{N}n} = e^{jk(\frac{2\pi}{N})n} \cdot e^{j2\pi n}$$

$$= \varphi_k[n] \ , \quad (n \in Z)$$

$$\Rightarrow \varphi_k[n] = \varphi_{k+rN}[n+N]\ , \quad (r \in Z)$$

$$x[n] = x[n+N]$$

$$\Rightarrow x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k \cdot e^{jk(\frac{2\pi}{N})n} \ , \quad a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]\cdot e^{-jk(\frac{2\pi}{N})n} \Rightarrow a_k = a_{k+rN} \ , \quad \begin{cases} N \in Z^+ \\ r \in Z \\ k \in Z \end{cases}$$

۳-٦- خواص سري فوريه زمان گسسته

۳-٦-۱- تفاضل اول

$$x[n]=x[n+N]\Rightarrow x[n]=\sum_{k=\langle N\rangle}a_k\cdot e^{jk(\frac{2\pi}{N})n}$$

$$x[n-1]=\sum_{k=\langle N\rangle}a_k\cdot e^{-jk(\frac{2\pi}{N})}\cdot e^{jk(\frac{2\pi}{N})n}$$

$$\Rightarrow y[n]=x[n]-x[n-1]=\sum_{k=\langle N\rangle}a_k(1-e^{-jk(\frac{2\pi}{N})})\cdot e^{jk(\frac{2\pi}{N})n}$$

۳-٦-۲- رابطه پارسوال

$$\frac{1}{N}\sum_{k=\langle N\rangle}\left|x[n]\right|^2=\sum_{k=\langle N\rangle}\left|a_k\right|^2$$

مثال ٤) فرض كنيد اطلاعات زير درباره دنباله x[n] داده شده:

الف) $N=6\ ,\ x[n]=x[n+N]$

ب) $\sum_{n=0}^{5}x[n]=2$

ج) $\sum_{n=2}^{7}(-1)^n\ x[n]=1$

در ميان مجموعه سيگنال‌هايي كه در سه شرط بالا صدق مي‌كنند x[n]ائي را پيدا كنيد كه كمترين توان را در هر دوره تناوب دارد.

$$x[n]=\sum_{k=\langle 6\rangle}a_k\cdot e^{jk(\frac{2\pi}{6})n}=\sum_{k=0}^{5}a_k\cdot e^{jk(\frac{\pi}{3})n}\quad ;\quad \{a_0,a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}\ \text{مجموعه ضرايب}$$

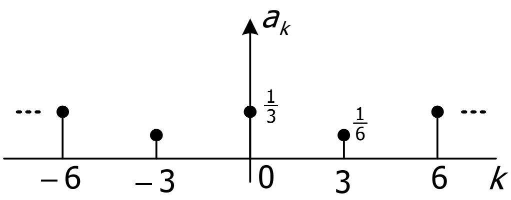
$$a_k=\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{5}x[n]e^{-jk(\frac{\pi}{3})n}\Rightarrow a_0=\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{5}x[n]=\frac{1}{3}$$

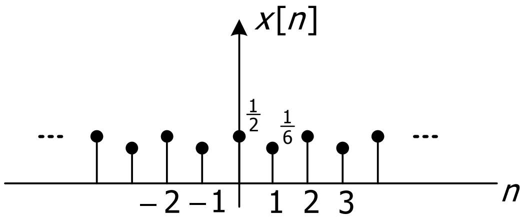
$$a_k=\frac{1}{6}\sum_{n=2}^{7}x[n]e^{-jk\frac{\pi}{3}n}\Rightarrow a_3=\frac{1}{6}\sum_{n=2}^{7}x[n]e^{-j\pi n}=\frac{1}{6}\sum_{n=2}^{7}(-1)^n\ x[n]=\frac{1}{6}\ ,\quad a_3=a_{-3}=\frac{1}{6}$$

با توجه به رابطه پارسوال، براي احراز آخرين شرط (x[n]ائي كه كمترين توان را در هر دوره تناوب دارد) بايستي ساير ضرايب صفر در نظر گرفته شود ($a_1=a_2=a_4=a_5=0$). بدين ترتيب با توجه به ضرايب a_0 و a_3 بدست آمده مي‌توان سيگنال x[n] را با استفاده از فرمول سنتز بدست آورد.

$$x[n]=\sum_{k=0}^{5}a_k e^{jk\frac{\pi}{3}n}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}e^{j\pi n}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}(-1)^n$$

$$\Rightarrow x[n]=\begin{cases}\frac{1}{2} & n=0\\ \frac{1}{6} & n=1\\ \frac{1}{2} & n=2\\ \frac{1}{6} & n=3\\ \frac{1}{2} & n=4\\ \frac{1}{6} & n=5\end{cases}$$





۳-۷- سیستم‌هاي LTI و سري فوریه زمان پیوسته

سیستم LTI با ورودي x(t)، خروجي y(t) و پاسخ ضربه h(t) را در نظر مي‌گیریم:

$$x(t) \longrightarrow \underset{LTI}{\boxed{h(t)}} \longrightarrow y(t) = x(t) * h(t)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau$$

پاسخ سیستم را به ورودي نمایي $x(t) = e^{st}$ را در حالت کلي بدست مي‌آوریم:

$$x(t) = e^{st}\Big|_{s=r+j\omega} \Rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{s(t-\tau)}h(\tau)d\tau = e^{st}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau$$

۳-۷-۱- پاسخ سیستم LTI به ورودي نمایي مختلط

الف)

$$s = j\omega \ , \ x(t) = e^{j\omega t} \Rightarrow y(t) = e^{j\omega t}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

پس به این ترتیب خروجي سیستم همان ورودي $x(t) = e^{j\omega t}$ در حاصل‌ضرب پاسخ فرکانسي سیستم خواهد بود. پاسخ فرکانسي هر سیستم LTI با پاسخ ضربه h(t) از رابطه زیر محاسبه مي‌شود.

$$H(j\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}dt$$

ب)

$$x(t) = x(t+T_0) \Rightarrow x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \cdots + a_{-1}e^{-j\omega_0 t} + a_0 + a_1 e^{j\omega_0 t} + \cdots$$

با توجه به خطي بودن سیستم، پاسخ به مجموعه ورودي‌ها برابر مجموع پاسخ‌ها به تك‌تك ورودي‌هاست.

$$\Rightarrow y(t) = \cdots + a_{-1}e^{-j\omega_0 t}\cdot H(-j\omega_0) + a_0\cdot H(j0) + a_1 e^{j\omega_0 t}\cdot H(j\omega_0) + \cdots$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}\cdot H(jk\omega_0) \ , \ H(jk\omega_0) = H(j\omega)\Big|_{\omega=k\omega_0}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \Rightarrow y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{a_k H(jk\omega_0)}_{b_k} e^{jk\omega_0 t}$$

اگر ورودي به سیستم LTI متناوب و با ضرایب سري فوریه a_k باشند، خروجي سیستم نیز متناوب (با همان دوره تناوب ورودي) $b_k = a_k H(jk\omega_0)$ خواهد بود. با عبور ورودي متناوب از سیستم مي‌توان برخي از هارمونيها را تقویت، تضعیف و یا به طور کامل حذف نمود.

مثال ۱) اگر $x(t) = e^{j2t} \quad , \quad y(t) = x(t-3)$ خروجي چه خواهد بود؟

روش اول:

$$x(t) = e^{j2t} \quad , \quad y(t) = x(t-3) \Rightarrow y(t) = e^{j2(t-3)}$$

روش دوم:

$$h(t) = \delta(t-3)\ ,\ H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-3) e^{-j\omega t} dt = e^{-j3\omega}$$

$$\Rightarrow y(t) = e^{j2t} \cdot H(j\omega)\Big|_{\omega=2} = e^{j2t} \cdot e^{-j6}$$

روش سوم:

$$h(t) = \delta(t-3)\ ,\ x(t) = e^{j2t}$$

$$\Rightarrow y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\lambda - 3) e^{+j2(t-\lambda)} dt = e^{j2(t-3)}$$

مثال ۲) اگر $x(t) = \cos(4t) + \cos(7t)\ ,\ y(t) = x(t-3)$ خروجي چه خواهد بود؟

ابتدا سري فوريه ورودي را نوشته و آنگاه سري فوريه خروجي را بدست مي‌آوريم.

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{1}{2}e^{j4t} + \frac{1}{2}e^{-j4t} + \frac{1}{2}e^{j7t} + \frac{1}{2}e^{-j7t} \\
h(t) &= \delta(t-3) \Rightarrow H(j\omega) = e^{-j3\omega} \\
y(t) &= \frac{1}{2}e^{j4t}H(j4) + \frac{1}{2}e^{-j4t}H(-j4) + \frac{1}{2}e^{j7t}H(j7) + \frac{1}{2}e^{-j7t}H(-j7) \\
&= \frac{1}{2}e^{j4t} \cdot e^{-j12} + \frac{1}{2}e^{-j4t} \cdot e^{j12} + \frac{1}{2}e^{j7t} \cdot e^{-j21} + \frac{1}{2}e^{-j7t} \cdot e^{j21} \\
&= \cos(4t-12) + \cos(7t-21)
\end{aligned}$$

مثال ۳) ورودي $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(2\pi)t}$ با ضرايب سري فوريه
$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = a_{-1} = \frac{1}{4} \\ a_2 = a_{-2} = \frac{1}{2} \\ a_3 = a_{-3} = \frac{1}{3} \end{cases}$$
به سيستم LTI با پاسخ ضربه $h(t) = e^{-t}u(t)$ اعمال مي‌شود. مطلوب است ضرايب سري فوريه خروجي؟

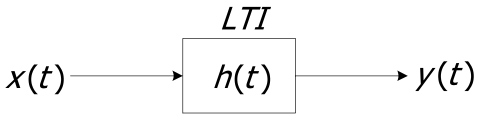
$$H(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t}u(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{0}^{\infty}e^{-(1+j\omega)t}dt=\frac{-1}{j\omega+1}e^{-(1+j\omega)t}\Big|_{0}^{+\infty}=\frac{1}{j\omega+1}$$

$$H(jk\omega_0)=H(jk2\pi)=\frac{1}{1+jk2\pi}$$

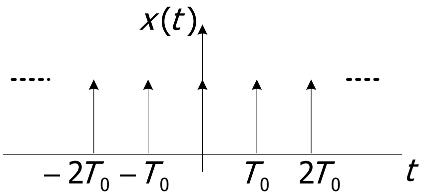
$$b_0=1\times1=1\ ,\ b_1=\frac{1}{4}\times\frac{1}{1+j2\pi}\ ,\ b_{-1}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{1-j2\pi}\ ,$$

$$b_2=\frac{1}{2}\times\frac{1}{1+j4\pi}\ ,\ b_{-2}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{1+j4\pi},\quad b_3=\frac{1}{3}\times\frac{1}{1+j6\pi}\ ,\ b_{-3}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{1+j6\pi}$$

۳-۷-۲- پاسخ سیستمLTI به قطار ضربه



$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t+mT_0)$$



$$a_k=\frac{1}{T_0}\int_{T_0}\delta(t)e^{-j\omega t}dt=\frac{1}{T_0}\quad,\quad x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{T_0}e^{jk\omega_0 t}$$

سري فوريه خروجي:

$$y(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\underbrace{\frac{1}{T_0}H(jk\omega_0)}_{b_k}e^{jk\omega_0 t}\quad,\quad \omega_0=\frac{2\pi}{T_0}$$

۳-۸- فيلتر كردن (زمان پيوسته)

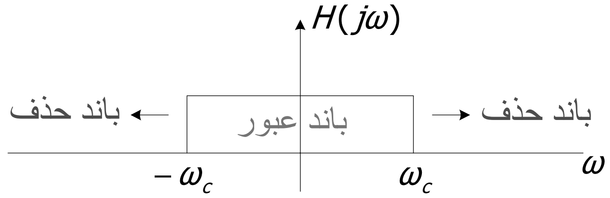
فيلترهاي شكل‌دهنده فركانسي: شكل طيف سيگنال ورودي را تغيير مي‌دهد.

فيلترهاي انتخاب‌گر فركانسي: بعضي از فركانس ها را اساسا بدون اعوجاج عبور داده و ساير فركانس ها را تضعيف يا حذف مي‌كند. (notch filter)

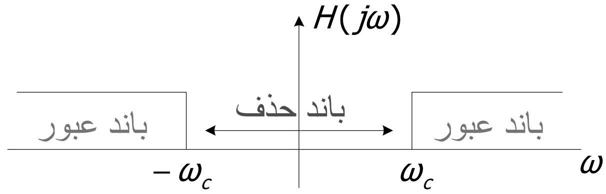
۳-۸-۱- انواع فيلترها

فيلتر پايين گذر (LPF*):

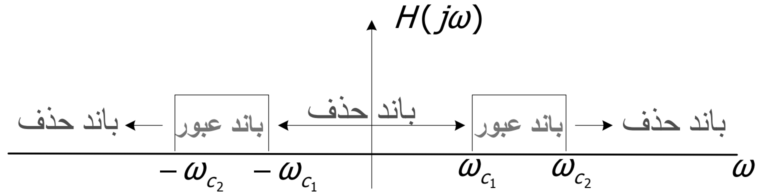
* 1. Low Pass Filter



فيلتر بالا گذر (HPF*):



فيلتر ميان گذر (BPF*):



۳-۸-۲- تشخيص نوع فيلتر:

با توجه به دادههاي مسئله به دو روش ميتوان نوع فيلتر را تشخيص داد:

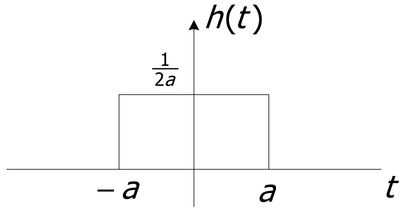
۱) اگر در صورت مسئله پاسخ ضربه سيستم h(t) داده شده باشد، با بدست آوردن $H(j\omega)$ و سپس رسم اندازه پاسخ فركانسي $|H(j\omega)|$ به ازاي فركانسهاي مختلف، نوع فيلتر را تشخيص ميدهيم.

۲- اگر در صورت مسئله معادله ديفرانسيل سيستم LTI داده شده باشد، ابتدا با اعمال تابع $x(t) = e^{j\omega t}$ بعنوان ورودي سيستم، $H(j\omega)$ را با توجه به رابطه $y(t) = e^{j\omega t} H(j\omega)$ بدست ميآوريم. سپس اندازه پاسخ فركانسي سيستم $|H(j\omega)|$ را ترسيم ميكنيم تا نوع فيلتر را تشخيص دهيم.

مثال ٤: پاسخ ضربه سيستم $h(t) = \frac{1}{2a} rect(\frac{t}{2a})$ داده شده است. سيستم LTI مذكور بمانند چه نوع فيلتري عمل ميكند؟

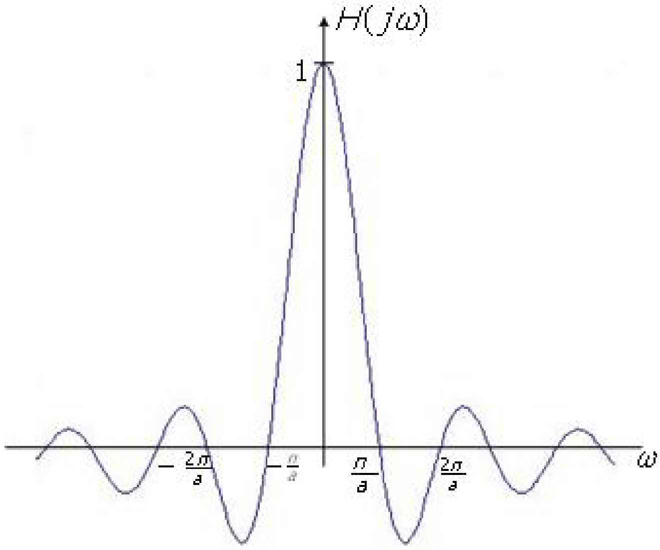
2. High Pass Filter

3. Band Pass Filter

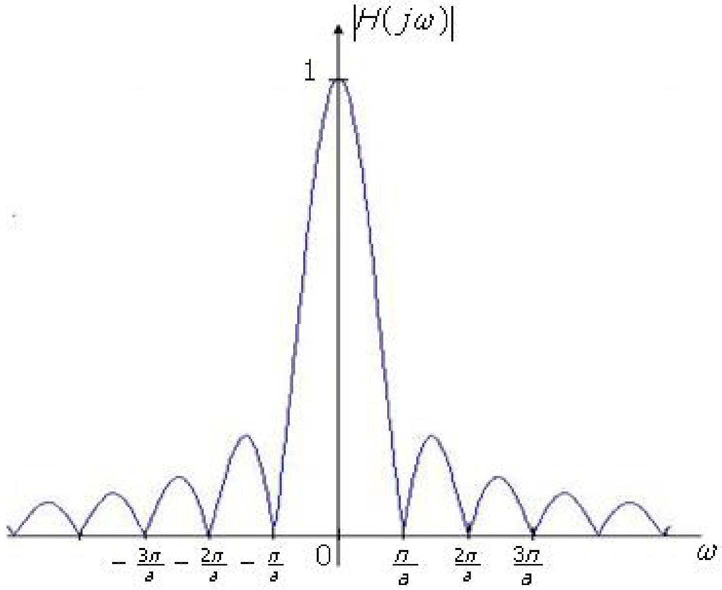


$$H(j\omega)=\int_{-a}^{a}\frac{1}{2a}e^{-j\omega t}dt=\frac{-1}{j2a\omega}(e^{-ja\omega}-e^{ja\omega})=\frac{\sin(a\omega)}{a\omega}=\frac{\sin(\frac{a\omega}{\pi}\pi)}{\frac{a\omega}{\pi}\pi}$$

$$=\operatorname{sinc}(\frac{\omega}{\pi}\cdot a)\ ;\quad \frac{\omega}{\pi}\cdot a=m\ ,\ \ m\in Z$$



براي تشخيص نوع فيلتر بايستي $|H(j\omega)|$ را ترسيم نمائيم.



كه با توجه به اندازه پاسخ فركانسي سيستم نوع فيلتر، فيلتر پايين گذر LPF غيرايده‌آل است چون نزديك صفر بيشترين دامنه را دارد و با افزايش فركانس اندازه پاسخ فركانسي بشدت كاهش و به سمت صفر ميل مي‌كند.

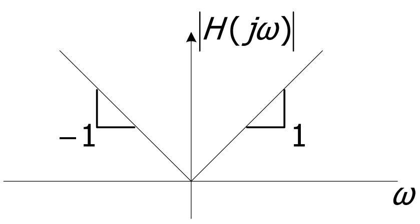
مثال ٥: اگر $y(t)=\dfrac{dx(t)}{dt}\ ,\ x(t)=e^{j\omega t}$ نوع فيلتر را تعيين كنيد.

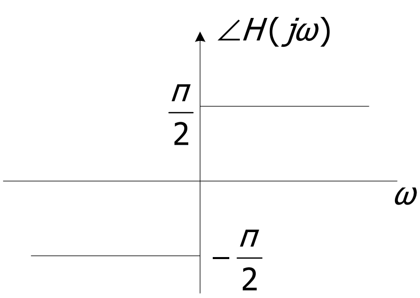
$$x(t)=e^{j\omega t}\ \Rightarrow\ y(t)=e^{j\omega t}H(j\omega)$$

X(t) و y(t) را در رابطه داده شده براي سيستم LTI جايگذاري مي‌كنيم تا پاسخ فركانسي سيستم را بدست آوريم.

$$e^{j\omega t}H(j\omega)=j\omega\, e^{j\omega t}\ \Rightarrow H(j\omega)=j\omega$$

$$|H(j\omega)|=|\omega| \qquad , \qquad \angle H(j\omega)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}; & \omega>0\\ -\dfrac{\pi}{2}; & \omega<0\end{cases}$$





با توجه به اندازه پاسخ فركانسي سيستم نوع فيلتر بالاگذر HPF است.

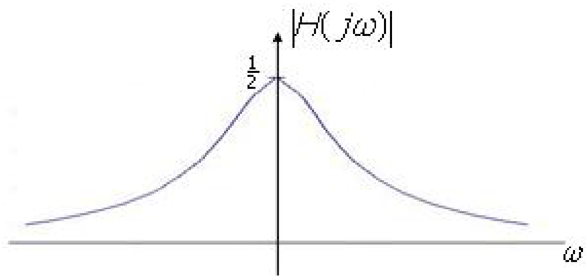
مثال ٦) اگر $y'(t)+2y(t)=\cos 3t$ مطلوبست:

الف) این سیستم به عنوان چه فیلتري عمل ميکند.

ب) سري فوریه خروجي را با توجه به ورودي داده شده به دست آورید.

حل الف:

$$y'(t)+2y(t)=x(t);\quad x(t)=e^{j\omega t}\Rightarrow y(t)=e^{j\omega t}H(j\omega)$$
$$j\omega\, e^{j\omega t}H(j\omega)+2e^{j\omega t}H(j\omega)=e^{j\omega t};$$
$$H(j\omega)=\frac{1}{2+j\omega}\quad,\quad |H(j\omega)|=\frac{1}{\sqrt{4+\omega^2}}$$

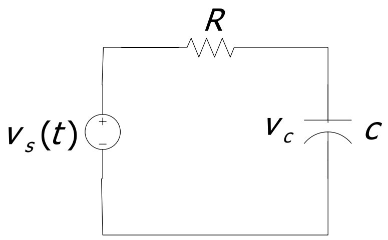


با توجه به شکل نوع فیلتر پایینگذر LPF است.

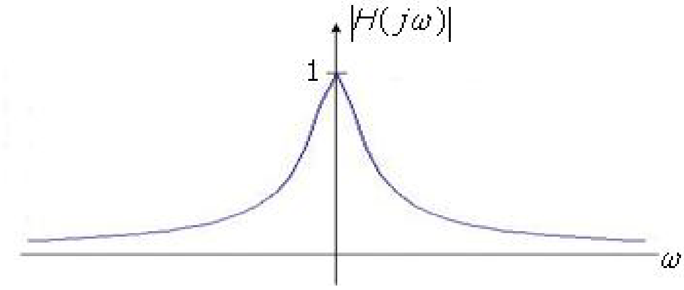
حل ب:

$$x(t)=\cos 3t=\frac{1}{2}e^{j3t}+\frac{1}{2}e^{-j3t}\quad;\omega_0=3$$
$$b_1=\frac{1}{2}H(j3)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2+3j}\ ,\ b_{-1}=\frac{1}{2}H(-j3)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2-3j}$$
$$y(t)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2+3j}e^{j3t}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2-3j}e^{-j3t}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{13}\,e^{j56.3}}e^{j3t}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{13}\,e^{-j56.3}}e^{-j3t}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{13}}\cos(3t-56.3)$$

مثال ۷) $H(j\omega)$ و نوع فیلتر را تعیین کنید.



$$RC\frac{dv_c(t)}{dt}+v_c(t)=v_s(t)\,;\quad v_s(t)=e^{j\omega t}\Rightarrow v_c(t)=e^{j\omega t}H(j\omega)$$
$$\Rightarrow RC(j\omega)e^{j\omega t}H(j\omega)+e^{j\omega t}H(j\omega)=e^{j\omega t}$$
$$H(j\omega)=\frac{1}{RC(j\omega)+1}\ ;\quad |H(j\omega)|=\frac{1}{\sqrt{1+R^2C^2\omega^2}}$$

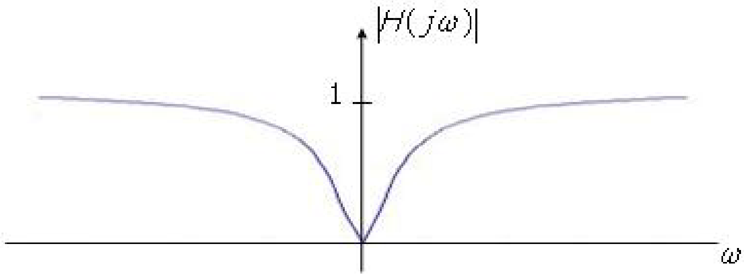


حال اگر خروجي دو سر مقاومت باشد:

$$\frac{dv_R(t)}{dt}+\frac{1}{RC}v_R(t)=\frac{dv_s(t)}{dt}\ ;\quad v_s(t)=e^{j\omega t}\Rightarrow v_R(t)=e^{j\omega t}H(j\omega)$$

$$\Rightarrow j\omega\, e^{j\omega t}+\frac{1}{RC}e^{j\omega t}H(j\omega)=j\omega\, e^{j\omega t}$$

$$H(j\omega)=\frac{j\omega}{\frac{1}{RC}+j\omega}\ ;\quad |H(j\omega)|=\frac{|\omega|}{\sqrt{(\frac{1}{RC})^2+\omega^2}}$$



تذكر: همانطوريكه ملاحظه مي‌شود بسته به اينكه خروجي در سر خازن و يا مقاومت در نظر گرفته شود نوع فيلترينگ از پايين‌گذر به بالاگذر تغيير مي‌كند.

۳-۹- سيستم‌هاي LTI و سري فوريه زمان گسسته

الف) $$x[n]=Z^n \Rightarrow y[n]=\sum_{m=-\infty}^{\infty} Z^{n-m}\cdot h[m]=Z^n\sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]Z^{-m}=Z^n\cdot H(z)$$

$$;\ H(z)\stackrel{\Delta}{=}\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]Z^{-n}$$

ب) $$Z=e^{j\Omega};\ x[n]=e^{j\Omega n}\Rightarrow y[n]=e^{jn\Omega}\cdot H(e^{j\Omega});\ H(e^{j\Omega})\stackrel{\Delta}{=}H(j\Omega)\equiv\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\,e^{-j\Omega n}$$

ج) $$x[n]=x[n+N]\quad;\quad x[n]=\sum_{k=<N>} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{N})n}$$

$$\Rightarrow y[n]=\sum_{k=<N>} b_k\cdot H(jk\frac{2\pi}{N})\quad;H(jk\frac{2\pi}{N})\stackrel{\Delta}{=}\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

تذكر: در مورد سيستم زمان گسسته و LTI با ورودي متناوب، خروجي نيز متناوب خواهد بود. دوره تناوب خروجي و ورودي يكسان بوده و ضرايب سري فوريه خروجي از رابطه داده شده در بند ۳ بدست مي‌آيد.

يادآوري (سري هندسي):

الف) $$\sum_{n=0}^{N-1}\alpha^n=\begin{cases}N & ,\alpha=1\\ \dfrac{1-\alpha^N}{1-\alpha} & ,\alpha\neq 1\end{cases}$$

ب) $$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n=\frac{1}{1-\alpha}\quad,\quad |\alpha|<1$$

ج) $$\sum_{n=0}^{\infty}n\alpha^n=\frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}\quad,\quad |\alpha|<1$$

د) $$\sum_{n=k}^{\infty}\alpha^n=\frac{\alpha^k}{1-\alpha}\quad,\quad |\alpha|<1$$

تمرين : $$\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2})^n\cos(\frac{\pi}{2}n)\stackrel{?}{=}\frac{4}{5}$$

مثال ۱) سیستم LTI با پاسخ ضربه $h[n]=\alpha^n u[n]$ داده شده است. پاسخ y[n] را به ورودي $x[n]=\cos(\frac{2\pi}{N}n)$ بدست آورید.

$$x[n]=\frac{1}{2}e^{j\frac{2\pi}{N}n}+\frac{1}{2}e^{-j\frac{2\pi}{N}n}$$

با توجه به خطی بودن سیستم، پاسخ به تك‌تك ورودي‌هاي نمايي مختلط طبق بند ۲ را بدست آورده و با يكديگر جمع مي‌كنيم تا پاسخ كلي سيستم به ورودي مذكور تعيين شود.

$$H(j\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\alpha^n u[n]e^{-j\Omega n}=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n\, e^{-j\Omega n}=\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha\, e^{-j\Omega})^n=\frac{1}{1-\alpha e^{-j\Omega}}$$

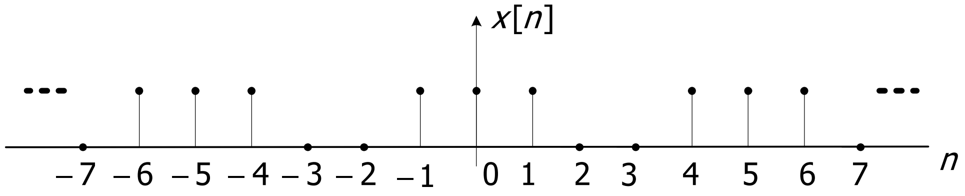
$$\Rightarrow y[n]=\frac{1}{2}e^{j\frac{2\pi}{N}n}\frac{1}{1-\alpha e^{-j\frac{2\pi}{N}n}}+\frac{1}{2}e^{-j\frac{2\pi}{N}n}\frac{1}{1-\alpha e^{+j\frac{2\pi}{N}n}}$$

$$\Rightarrow y[n]=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\alpha e^{-j\frac{2\pi}{N}n}}e^{j\frac{2\pi}{N}n}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\alpha e^{+j\frac{2\pi}{N}n}}e^{-j\frac{2\pi}{N}n}$$

$$b_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\alpha\, e^{-j\frac{2\pi}{N}n}}\qquad,\qquad b_{-1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\alpha\, e^{+j\frac{2\pi}{N}n}}$$

مثال ۲) سیستم LTI با پاسخ ضربه h[n] و ورودي متناوب x[n] داده شده است. سري فوريه خروجي را بدست آوريد.

$$h[n]=(\frac{1}{2})^{|n|}\quad,\quad x[n]=\begin{cases}1 & n=0,\pm1\\ 0 & n=\pm2,\pm3\end{cases}\quad;N=6$$



$$a_k=\frac{1}{6}\sum_{n=<N>}x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}=\frac{1}{6}(e^{-jk\frac{2\pi}{6}(-1)}+1+e^{-jk\frac{2\pi}{6}(1)})=\frac{1}{6}(1+2\cos(k\frac{\pi}{3}))$$

$$H(j\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(\frac{1}{2})^{|n|}\cdot e^{-j\Omega n}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{-1}(\frac{1}{2}\cdot e^{j\Omega})^{-n}+\sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{1}{2}\cdot e^{-j\Omega})^{n}=\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{1}{2}\cdot e^{j\Omega})^{n}+\sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{1}{2}\cdot e^{-j\Omega})^{n}$$

$$\Rightarrow H(j\Omega)=\frac{\frac{1}{2}e^{j\Omega}}{1-\frac{1}{2}e^{j\Omega}}+\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}=\frac{1-\frac{1}{4}}{1-\cos(\Omega)+\frac{1}{4}}=\frac{3}{5-4\cos(\Omega)}$$

$$H(jk\frac{2\pi}{6})=\frac{3}{5-4\cos(k\frac{\pi}{3})}\Rightarrow y[n]=\sum_{k=<6>}\frac{1}{6}(1+2\cos(k\frac{\pi}{3}))\cdot H(jk\frac{\pi}{3})e^{jk\frac{\pi}{3}n}$$

۳-۱۰- فیلتر کردن (زمان گسسته)

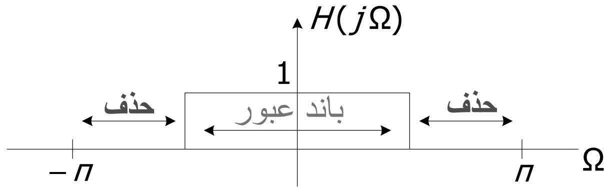
$$x[n]\longrightarrow\underset{LTI}{\boxed{h[n]}}\longrightarrow y[n]\qquad H(j\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h[n]e^{-j\Omega n}$$

$H(j\Omega)$ با دوره تناوب 2π متناوب است پس مي‌توان نوشت: $\quad H(j\Omega)=H(j(\Omega+2\pi))$

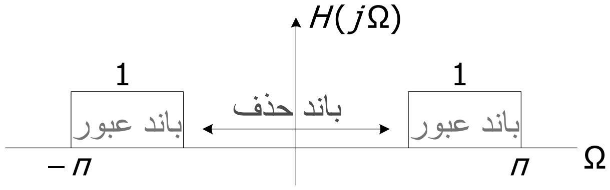
بدين ترتيب براي تشخيص نوع فيلتر در سيستم‌هاي زمان گسسته به اندازه پاسخ فركانسي در بازه $[-\pi,\pi]$ توجه شود.

۳-۱۰-۱- انواع فيلترها

فيلتر پائين‌گذر (LPF*):



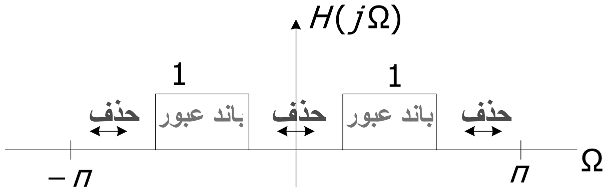
فيلتر بالاگذر (HPF*):



---

* 1. Low Pass Filter
2. High Pass Filter

فيلتر ميان‌گذر (BPF*):



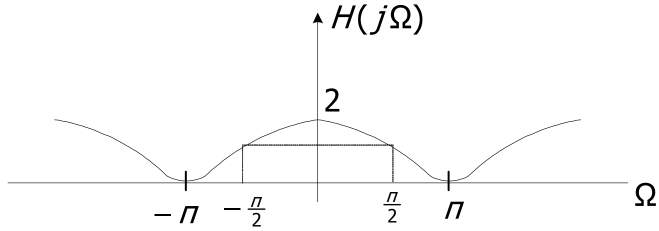
مثال ۳) در سيستم LTI زير مطلوبست پاسخ ضربه $h[n]$، پاسخ فركانسي $H(j\Omega)$ و نوع فيلتر؟

$$y[n] = \frac{1}{2}x[n+1] + x[n] + \frac{1}{2}x[n-1]$$

$$h[n] = y[n]\big|_{x[n]=\delta[n]} \Rightarrow h[n] = \frac{1}{2}\delta[n+1] + \delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1]$$

$$H(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\delta[n+1] + \delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1]\right)e^{-j\Omega n} = \frac{1}{2}e^{j\Omega} + 1 + \frac{1}{2}e^{-j\Omega} = 1 + \cos(\Omega)$$

$$H(j\Omega) = \begin{cases} 0 & \Omega = -\pi \\ 1 & \Omega = -\frac{\pi}{2} \\ 2 & \Omega = 0 \\ 1 & \Omega = \frac{\pi}{2} \\ 0 & \Omega = \pi \end{cases}$$



با توجه به $H(j\Omega)$ در بازه $[-\pi,\pi]$ (چون همواره مثبت است لذا با $|H(j\Omega)|$ برابر خواهد بود) نوع فيلتر پايين‌گذر LPF است.

مثال ٤) درسيستم LTI زير مطلوبست پاسخ فركانسي $H(j\Omega)$ و نوع فيلتر؟

$$y[n] = -\frac{1}{2}x[n+2] + x[n] - \frac{1}{2}x[n-2]$$

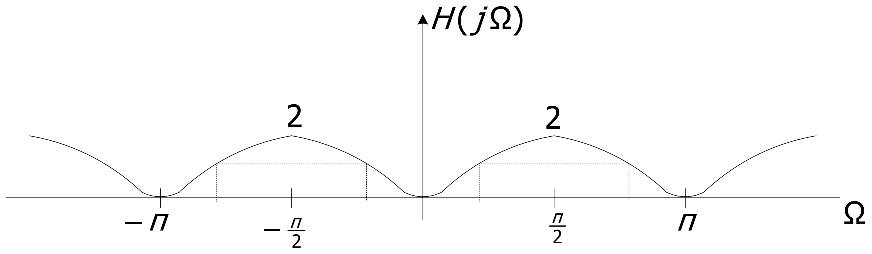
از آنجايي كه h[n] در مسئله خواسته شده است، طبق بند ۲ مستقيما $H(j\Omega)$ را بدست مي‌آوريم.

---

3. Band Pass Filter

$$x[n]=e^{j\Omega n}\Rightarrow y[n]=e^{j\Omega n}H(j\Omega)$$
$$e^{j\Omega n}H(j\Omega)=-\frac{1}{2}e^{j\Omega(n+2)}+e^{j\Omega n}-\frac{1}{2}e^{j\Omega(n-2)}$$
$$\Rightarrow H(j\Omega)=-\frac{1}{2}e^{j2\Omega}+1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega 2}=1-\cos(2\Omega)$$

$$H(j\Omega)=\begin{cases}0 & \Omega=0\\ 1 & \Omega=\pm\frac{\pi}{4}\\ 2 & \Omega=\pm\frac{\pi}{2}\\ 1 & \Omega=\pm\frac{3\pi}{2}\\ 0 & \Omega=\pm\pi\end{cases}$$



با در نظر گرفتن پاسخ فرکانسي در بازه $[-\pi,\pi]$ نوع فيلتر ميان‌گذر BPF است.

مثال ۵) سيستم LTI و علي با معادله تفاضلي زير داده شده است.

$$y[n]=\sum_{k=0}^{\infty}(2^{-k})x[n-k]$$

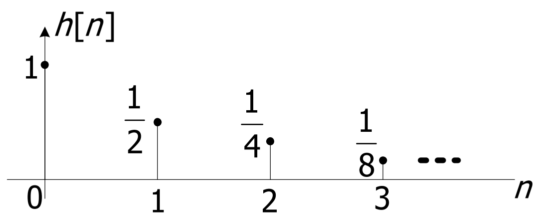
مطلوبست:

الف) پاسخ ضربه h[n] ؟

ب)پاسخ فرکانسي $H(j\Omega)$؟

ج) نوع فيلتر ؟

$$h[n]=y[n]\Big|_{x[n]=\delta[n]}\Rightarrow h[n]=\sum_{k=0}^{\infty}(2^{-k})\,\delta[n-k]=\delta[n]+2^{-1}\delta[n-1]+2^{-2}\delta[n-2]+\cdots$$

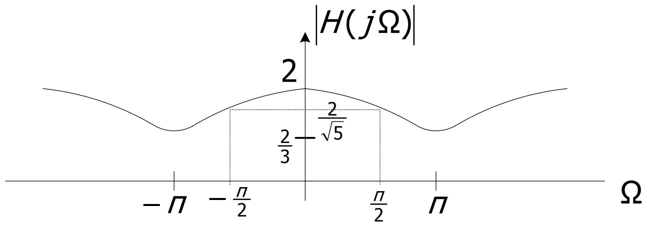


$$H(j\Omega)=1+2^{-1}e^{-j\Omega}+2^{-2}e^{-j2\Omega}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}2^{-k}\cdot e^{-jk\Omega}=\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{2}\cdot e^{-j\Omega})^{k}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}$$

$$\Rightarrow H(j\Omega) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\cos\Omega + j\frac{1}{2}\sin\Omega}$$

$$\left|H(j\Omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{1}{2}\cos\Omega)^2 + (\frac{1}{2}\sin\Omega)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4} - \cos(\Omega)}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4} - \cos(\Omega)}}$$

$$\left|H(j\Omega)\right| = \begin{cases} 2 & \Omega = 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \Omega = \pm\frac{\pi}{2} \\ \frac{2}{3} & \Omega = \pm\pi \end{cases}$$



با در نظر گرفتن اندازه پاسخ فركانسي در بازه $[-\pi, \pi]$، از آنجايي كه با افزايش فركانس ميزان تضعيف با توجه به شكل زياد مي‌شود، نوع فيلتر را مي‌توان پايين‌گذر LPF دانست.

۳-۱۱- خلاصه

اگر $f(t)$ با دوره تناوب T باشد، آنگاه با توجه به $f(t) = f(t+T)$ تابع $G(t) = f(f(t))$ نيز پريوديك با دوره تناوب T خواهد بود. اگر T_1 دوره تناوب اصلي تابع f(t) باشد، در اين صورت دوره تناوب اصلي G(t) لزوما T نيست.

اگر سيگنال در طي يك دوره تناوب (T) فرموله شود (f(t))، با توجه به رابطه گفته شده سيگنال متناوب در كل زمان‌ها بيان مي‌شود $(\tilde{f}(t))$.

سري فوريه، تنها براي توابع متناوب بيان مي‌شود، توابعي كه داراي دوره تناوب اصلي $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$, $x(t) = x(t+T)$ مي‌باشند.

در صورتي كه بتوان سيگنال را به صورت مجموعه‌اي از هارموني‌ها بسط داد، مي‌توان به اين سوال كه در يك سيگنال چه فركانس‌هايي و با چه قدرتي وجود دارند را پاسخ داد.)

پاسخ سيستم LTI به نمايي مختلط $e^{jk\omega_0 t}$ يا به طور كلي $e^{j\omega t}$ به فرم بسيار ساده‌اي تعريف مي‌شود.

هرچه هارموني‌ها بالاتر باشد فركانس‌ها بالاتر است و برعكس هر چه هارموني‌ها پايين‌تر باشد فركانس‌ها پايين‌تر است.

اگر سيگنالي در هارموني‌هاي بالا ضرايب سري فوريه بزرگتري داشته باشد سيگنال فركانس بالا است و برعكس اگر سيگنالي در هارموني‌هاي پايين ضرايب سري فوريه بزرگتري داشته باشد سيگنال فركانس پايين است.

به شرط برقرار بودن شرايط ديريكله همگرايي سري فوريه قابل بررسي است.

مجوعه ضرايب $\{a_k\}$ را ضرايب سري فوريه يا ضرايب طيفي x(t) مي‌نامند. اين ضرايب در حالت كلي مختلط هستند و اندازه آن‌ها نشان‌دهنده قدرت سيگنال در هارموني متناظر است. ضريب a_0 مؤلفه DC يا ثابت سيگنال است.

با دانستن خواص سري فوريه، در برخي مسائل براي پيدا كردن ضرايب سري فوريه لزومي به استفاده از تعريف گفته شده براي سري فوريه نيست.

اگر ورودي ضرايب فوريه a_k باشند، خروجي $b_k e^{jkw_0}$ مي‌باشد. مي‌توان تعدادي از وروديها را از خروجي حذف كرد.

اگر سيستم ورودي سيستم LTI متناوب باشد، خروجي نيز با همان دوره تناوب متناوب خواهد بود.

با توجه به ورودي و خروجي سيستم مي‌توان نوع فيلتر و شكل آن را بدست آورد.